Handreichungen für den Unterricht mit grafikfähigen Taschenrechnern ohne CAS (GTR)

1. Methodisch-didaktische Bemerkungen zum Unterricht mit GTR

Der Unterricht mit GTR in der Qualifikationsphase im Hinblick auf das Landesabitur setzt voraus, dass die entsprechenden Geräte den Schülerinnen und Schülern im Unterricht, bei der Arbeit zu Hause und in Leistungsüberprüfungen zur Verfügung stehen. So sind die Werkzeuge selbstverständliche Hilfsmittel, ihre Nutzung ist aber nicht verpflichtend. Die expliziten Lernanteile für eine Werkzeugkompetenz (Erlernen der Handhabung eines Rechners) sind jedoch wegen der Schnelllebigkeit der Technik so gering wie möglich zu halten.

Grafikfähige Taschenrechner und Geometrieprogramme (z. B. GeoGebra) haben die Funktion von Werkzeugen mit einem besonderen Wert als

– Medium zur Visualisierung und Darstellung mathematischer Inhalte,
– Medium zum Experimentieren und entdeckenden Lernen,
– Werkzeug zur Bearbeitung konkreter Daten und realitätsnaher Probleme.

Die Schülerinnen und Schüler lernen im Mathematikunterricht unterschiedliche mathematische Verfahren und Hilfsmittel für bestimmte Themenfelder kennen und üben deren Anwendung. Sie nutzen verschiedene Zugänge und Hilfsmittel zur Lösung einer Aufgabe entsprechend ihren individuellen Präferenzen im Denken und Lernen und kommunizieren diese. Wesentlich ist hier die parallele Verfügbarkeit verschiedener Beschreibungsebenen (Tabelle, Grafik, algebraische Beschreibung). Besonderer Wert ist auf die grundlegenden Ideen und das Grundverständnis zentraler Begriffe (Ableitung, Integral, Vektor, Wahrscheinlichkeit, …) zu legen.

Beim Einsatz von Rechnern bei Leistungsüberprüfungen sind besondere Anforderungen an die Lösungswegdokumentation in Form schriftlicher Erläuterungen zu stellen. Dabei ist auf eine korrekte mathematische Schreibweise zu achten; rechnerspezifische Schreibweisen (z. B. binomCdf(100,0.5,60) anstelle von $P(X \leq 60) = F(100; 0,5; 60)$) sind zu vermeiden.

2. Präzisierungen im Hinblick auf das Landesabitur

Im Folgenden werden für einzelne Stichworte des Lehrplans Präzisierungen im Hinblick auf mögliche Aufgabenstellungen im Landesabitur benannt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die angegebenen Stichworte keine Einschränkung der verbindlichen Unterrichtsinhalte darstellen. Grundlage für die Erstellung der Prüfungsaufgaben sind die verpflichtend zu behandelnden Inhalte des Lehrplans.

2.1 Leistungskurs

LK Q1 Analysis II

Integralbegriff

– unterschiedliche Aspekte des Integralbegriffs, insbesondere auch der numerische Zugang (Rechtecksummen, Trapezsummen)
– Integralbegriff als verallgemeinerte Summation in Anwendungszusammenhängen (insbesondere Bogenlänge und Mittelwert)

Mathematisierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen
– auf der Grundlage experimentell ermittelter Daten
– logistisches Wachstum (mittels Regression)

Untersuchung komplexerer Funktionen und Extremalprobleme
– Im Vordergrund steht die Untersuchung von Funktionen in realen Bezügen. Grafische und numerische Verfahren sind problemangemessen auszuwählen und einzusetzen.

Approximation von Funktionen
– Ausgleichskurven als mathematische Modelle für gegebene Daten
– Interpolation, insbesondere Spline-Funktionen
– Regression für verschiedene Funktionstypen (auch nichtlineare Regression)
– Methoden zur Beurteilung der Passgenauigkeit, insbesondere die Methode der kleinsten Quadrate

LK Q2 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Lineare Gleichungssysteme
– stärkere Gewichtung der Modellierung von Anwendungszusammenhängen und der Interpretation von Lösungsmengen

Matrizen und lineare Abbildungen
– Anwendungen (insbesondere Markoff-Ketten)

LK Q3 Stochastik

Operationscharakteristiken
– insbesondere zur Förderung des Grundverständnisses und zur Beurteilung der Güte bei Hypothesentests

2.2 Grundkurs

GK Q1 Analysis II

Integralbegriff
– Integralbegriff als verallgemeinerte Summation in Anwendungszusammenhängen (insbesondere die grafisch-numerische Ermittlung der Bogenlänge und des Mittelwertes)

Mathematisierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen
– auf der Grundlage experimentell ermittelter Daten

Funktionsuntersuchungen und Extremalprobleme:
- Im Vordergrund steht die Untersuchung von Funktionen in realen Bezügen. Grafische und numerische Verfahren sind problemangemessen auszuwählen und einzusetzen.
- Anpassung von Funktionen an gegebene Daten
  - Interpolation
  - Regression für verschiedene Funktionstypen
  - Methoden zur Beurteilung der Passgenauigkeit, insbesondere die Methode der kleinsten Quadrate

GK Q2 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Lineare Gleichungssysteme
- stärkere Gewichtung der Modellierung von Anwendungszusammenhängen und der Interpretation von Lösungsmengen

3. Hinweise zur Lösungsdokumentation mit einem GTR

Beim Einsatz eines GTR bei schriftlichen Leistungsnachweisen sind besondere Anforderungen an die Lösungswegdokumentation in Form schriftlicher Erläuterungen zu stellen, die von den jeweiligen Operatoren abhängig sind:

- *berechnen:*
  durch Rechenoperationen zu einem Ergebnis gelangen und die Rechenschritte dokumentieren

  Es muss ein Rechenweg ohne Nutzung der erweiterten Funktionalitäten eines GTR, so wie sie für den WTR beschrieben sind (vgl. Abschnitt 19.6 des Erlasses „Hinweise zur Vorbereitung auf die schriftlichen Abiturprüfungen im Landesabitur 2017 (Abiturerlass)“ vom 20. Juni 2016), sowie ohne Nutzung der Grafikfähigkeit eines GTR dokumentiert werden.

- *bestimmen/ermitteln*:
  einen Zusammenhang oder einen möglichen Lösungsweg aufzeigen und das Ergebnis formulieren

  Alle Funktionalitäten eines GTR können benutzt werden; die Nutzung muss dokumentiert werden.

4. Beispiele zur Lösungsdokumentation

Im Folgenden werden Dokumentationen von Lösungswegen exemplarisch dargestellt. Selbstverständlich sind jedoch Lösungswege, die von den vorgegebenen abweichen, aber dem Operator entsprechend als gleichwertig betrachtet werden können, ebenso zu akzeptieren.

<table>
<tr><td colspan="2">In einem Aufgabenzusammenhang sind die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen f und g mit $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ gesucht.</td></tr>
<tr><td>Operator: berechnen</td><td>Operator: bestimmen oder ermitteln</td></tr>
<tr><td>Ansatz formulieren wie z. B.: „Funktionen gleichsetzen“ oder f(x) = g(x)
$2x^2 - 3x - 4 = \frac{1}{2}x + 1$
$x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{5}{2} = 0$
$x_{1,2} = \frac{7}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{5}{2}}$
$x_1 \approx -0{,}932$
$x_2 \approx 2{,}682$
in g(x) eingesetzt:
$S_1(-0{,}932|0{,}534)$
$S_2(2{,}682|2{,}341)$</td><td>Ansatz formulieren wie z. B.: „Funktionen gleichsetzen“ oder f(x) = g(x)
$2x^2 - 3x - 4 = \frac{1}{2}x + 1$
$S_1(-0{,}932|0{,}534)$
$S_2(2{,}682|2{,}341)$

Die Schnittpunkte wurden mithilfe eines GTR (grafisch) bestimmt.

alternativ:
Lösen der Gleichung $2x^2 - \frac{7}{2}x - 5 = 0$ und Einsetzen der Werte in g(x).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Die Gleichung $e^{x-1} = x + 1$ soll gelöst werden.</td></tr>
<tr><td>Operator: berechnen</td><td>Operator: bestimmen oder ermitteln</td></tr>
<tr><td>Die Gleichung ist algebraisch nicht lösbar.</td><td>$e^{x-1} = x + 1 \Rightarrow$
$x_1 \approx -0{,}84$
$x_2 \approx 2{,}14$

Die Lösungen der Gleichung wurden mithilfe eines GTR (grafisch) bestimmt.

alternativ: numerisches Lösen der Gleichung</td></tr>
</table>

Gesucht ist der Wert des Integrals $\int_1^3 (x^2+1)dx$.	
Operator: **berechnen**	Operator: **bestimmen** oder **ermitteln**
$\int_1^3 \left(x^2+1\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^3$ $=\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3+3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3+1\right)=\frac{32}{3}$ *alternativ:* $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x; \int_1^3 \left(x^2+1\right)dx$ $=F(3)-F(1)=\frac{32}{3}$	$\int_1^3 \left(x^2+1\right)dx=\frac{32}{3}$ Der Wert des Integrals wurde mithilfe eines GTR bestimmt.

Gesucht ist die Lösung eines LGS.	
Operator: **berechnen**	Operator: **bestimmen** oder **ermitteln**
$\begin{array}{llcl} \text{I} & 2x-3y-z & = & -4 \\ \text{II} & x-2y-z & = & -3 \quad \mid -2\text{II}+\text{I} \\ \text{III} & -3x+9y+3z & = & 15 \quad \mid 2\text{III}+3\text{I} \end{array}$ $\begin{array}{llcl} \text{I} & 2x-3y-z & = & -4 \\ \text{II} & y+z & = & 2 \\ \text{III} & 9y+3z & = & 18 \quad \mid \text{III}-9\text{II} \end{array}$ $\begin{array}{llcll} \text{I} & 2x-3y-z & = & -4 & \Rightarrow x=\frac{-4+3\cdot 2+0}{2}=1 \\ \text{II} & y+z & = & 2 & \Rightarrow y=2-0=2 \\ \text{III} & -6z & = & 0 & \Leftrightarrow z=0 \end{array}$	$\left.\begin{array}{rcl} 2x-3y-z & = & -4 \\ x-2y-z & = & -3 \\ -3x+9y+3z & = & 15 \end{array}\right\} x=1; y=2; z=0$ Die Lösung des LGS wurde mithilfe eines GTR bestimmt.

Gegeben ist die Binomialverteilung mit den Kenngrößen n = 45 und p = 0,1 und gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(3 \le X \le 8)$.	
Operator: **berechnen**	Operator: **bestimmen** oder **ermitteln**
Der Operator wird für obige Aufgabenstellung nicht verwendet, da Wahrscheinlichkeiten wie diese nicht von Hand berechnet werden sollen.	$P(3 \le X \le 8)$ = F(45;0,1;8) – F(45;0,1;2) ≈ 0,968 – 0,159 =0,809 *alternativ:* $P(3 \le X \le 8) = \sum_{i=3}^{8} \binom{45}{i} \cdot (0,1)^i \cdot (0,9)^{45-i} \approx 0,809$

Stand: 20.06.2015